

数 学（90分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答用紙4枚すべての受験番号欄（各2箇所、合計8箇所）に受験番号を必ず記入しなさい。
3. 問題は全部で4問あり、2ページからなっています。落丁・乱丁 及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. この問題用紙の余白は、下書きに使用してもよろしい。
5. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所を書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 問題用紙と下書用紙は、持ち帰りなさい。

- 1 a を 0 でない実数とする。実 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{3} & 1 - \frac{2a}{3} & \frac{a}{3} \\ \frac{a}{6} & \frac{a}{6} & 1 - \frac{5a}{6} \end{pmatrix}$$

と、実 3 次数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 $T_A(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^3$) を考える。

T_A の固有値は $1 - a$ および 1 のみである。この事実は証明する必要はない。

- (1) T_A の固有値 $1 - a$ に対する固有空間 W_{1-a} の基底と、固有値 1 に対する固有空間 W_1 の基底をそれぞれ一組求めよ。

- (2) $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする。 c は、 $u \in W_{1-a}$ および $v \in W_1$ を用いて、

$c = u + v$ と表せることを示せ。また、そのような u と v を求めよ。

- 2 (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2}{x^4}$ を求めよ。

- (2) $0 \leq t < \sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し、定積分 $\int_0^t \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}} dx$ を求めよ。ま

た、広義積分 $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}} dx$ を求めよ。

3 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2 + 12$ を考える。

- (1) $f(x, y)$ が極値をとる点 (x, y) のうち, $y > 0$ を満たすものを求めよ。
- (2) 以下の問いに答えよ。
 - (i) x の関数 $g(x) = f(x, x)$ は, $x = 0$ で極小値をとることを示せ。
 - (ii) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極値をとらないことを示せ。

- 4** (1) 未知関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式 $y' + 2xy = x$ の一般解を求めよ。
- (2) 未知関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = -4e^x \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

の解を求めよ。

(以上)