

# 数 学 (90分)

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答用紙4枚すべての受験番号欄（各2箇所、合計8箇所）に受験番号を必ず記入しなさい。
3. 問題は全部で4問あり、2ページからなっています。落丁・乱丁 及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. この問題用紙の余白は、下書きに使用してもよろしい。
5. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所を書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 問題用紙と下書用紙は、持ち帰りなさい。

- 1 以下では、行列の成分はすべて実数であるとする。 $E$ を2行2列の単位行列とし、 $O$ を2行2列の零行列とする。2行2列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し、2行2列の行列  $\tilde{A}$  と実数  $\text{tr}(A)$  を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(A) = a + d$$

と定める。また、 $|A|$  は  $A$  の行列式であるとする。

- (1) 行列の積  $A\tilde{A}$  および  $\tilde{A}A$  を求めよ。
- (2)  $A - \text{tr}(A)E + \tilde{A}$  を求めよ。
- (3) 等式  $A^2 - \text{tr}(A)A + |A|E = O$  が成り立つことを示せ。
- (4) 次の条件 (i) と条件 (ii) は同値であることを示せ。
  - (i)  $A^2 = O$
  - (ii)  $|A| = 0$  かつ  $\text{tr}(A) = 0$

- 2 (1) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \cos x}{\tan^2 x}$  を求めよ。

- (2) 定積分  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^4 + 3x^2 - 1}$  を求めよ。

**3**  $xy$  平面上の関数

$$f(x, y) = x^2y^2 - 4x^3 - 4xy + 8x$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x, y)$  の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ。
- (2) 関数  $f(x, y)$  が極小値をとるような  $xy$  平面の点  $(x, y)$  をすべて求めよ。

**4** (1) 未知関数  $y = y(x)$  に関する微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' - 3x^2y = x^2e^{-x^3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ。

- (2) 未知関数  $y = y(x)$  に関する微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = x$$

の一般解を求めよ。

(以上)