

数 学 (90分)

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答用紙4枚すべての受験番号欄（各2箇所、合計8箇所）に受験番号を必ず記入しなさい。
3. 問題は全部で4問あり、2ページからなっています。落丁・乱丁及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. この問題用紙の余白は、下書きに使用してもよろしい。
5. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 問題用紙と下書用紙は、持ち帰りなさい。

- 1 \mathbf{R}^3 を実3次元数ベクトル空間とする。 \mathbf{R}^3 のベクトル a, b, c, d に対し, 実数 $F(a, b, c, d), G(a, b, c, d)$ を次で定める。

$$F(a, b, c, d) = (a \times b) \cdot (c \times d),$$

$$G(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}$$

ただし, \cdot と \times でそれぞれ \mathbf{R}^3 のベクトルの内積と外積を表した。

- (1) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, \mathbf{R}^3 のベクトル c, d に対し,

$$F(a, b, c, d) = G(a, b, c, d)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 実数 k と \mathbf{R}^3 のベクトル a, c, d に対し,

$$F(a, ka, c, d) = 0, \quad G(a, ka, c, d) = 0$$

が成り立つことを示せ。

- (3) \mathbf{R}^3 のベクトル a, b_1, b_2, c, d に対し,

$$F(a, b_1 + b_2, c, d) = F(a, b_1, c, d) + F(a, b_2, c, d),$$

$$G(a, b_1 + b_2, c, d) = G(a, b_1, c, d) + G(a, b_2, c, d)$$

が成り立つことを示せ。

- 2 (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(1 - \cos x)}{\log(\sin x)}$ を求めよ。

- (2) 定積分 $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{3 + e^{2x}} dx$ を求めよ。

3 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 - 2xy - y^3$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 1, -2)$ における接平面の方程式を求めよ。
- (2) $x = 1$ の近くで定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ が、 $\varphi(1) = 1$ および、 $x = 1$ の近くで $f(x, \varphi(x)) = -2$ を満たすとする。導関数 $\varphi'(x)$ を、 x と $\varphi(x)$ を含む式で表せ。
- (3) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ。

4 (1) 未知関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式を考える。

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$$

- (i) $z(x) = x + y(x)$ とおいて $(*)$ と同値な $z(x)$ に関する微分方程式を導け。
 - (ii) $(*)$ の解のうち $y(0) = 0$ を満たすものを陰関数表示で求めよ。ただし、「解を陰関数表示で求める」とは、 s, t の2変数関数 $F(s, t)$ であって、 $F(s, t)$ は定数関数ではなく、 $F(x, y(x)) = 0$ (ただし、 $y(x)$ は $(*)$ の解) となるものをひとつ求めることである。
- (2) 未知関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

(以上)