令和６年度（後期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　　学 （120 分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，下書きなどに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と下書用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ c を実数とし， $0 < c < 1$ を満たすとする。次の定積分を考える。

$$S(c) = 2\int_0^2 x|\log(x^2+c)|\,dx$$

(1) $S(c)$ を求めよ。

(2) c が $0 < c < 1$ の範囲を動くときの $S(c)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 R は $R > 1$ を満たすとする。xy 平面を動く点 P, Q の時刻 t $(t \geqq 0)$ における座標が

$$\mathrm{P}\left(R\cos\frac{t}{R},\ R\sin\frac{t}{R}\right), \quad \mathrm{Q}\left(R\cos\frac{t}{R}+\cos t,\ R\sin\frac{t}{R}+\sin t\right)$$

であるとする。xy 平面の原点を O とする。

(1) $k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる実数 k が存在するような正の実数 t のうち，最小のものを t_0 とする。t_0 の値を求めよ。

(2) (1) で求めた t_0 に対し，時刻 $t=0$ から時刻 $t=t_0$ までの間に Q が動いた道のりを求めよ。

（以下余白） ［後期］

3 z, w を 0 でない複素数とし，$\dfrac{w}{z}$ は実数でないとする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(z), \mathrm{B}(w)$ について，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S と表す。

(1) S は複素数 $\dfrac{\bar{z}w}{2}$ の虚部の絶対値に等しいことを証明せよ。ただし，$\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(2) z の絶対値を r とし，z の偏角を θ とする。次の条件が成り立つとする。

$$r = 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad w = 2 + \frac{1}{z}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(i) S を θ を用いて表せ。

(ii) S のとりうる値の範囲を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 b, c, n が $\dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{n}$ を満たすとする。このとき，$(b-n)(2c-n)$ を n を用いて表せ。さらに，$b > n$ であることと $b-n$ は n^2 の約数であることを示せ。

(2) k を自然数とする。自然数の組 (a, b, c) に対する次の条件（ア），（イ），（ウ）を考える。

（ア） $\dfrac{2^k - 1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$

（イ） $a < b$ かつ $a < c$

（ウ） b は奇数

このとき，次の問いに答えよ。

(i) 自然数の組 (a, b, c) が（ア），（イ）を満たすとき，$2^k - 1 < a < 2^k + 2$ であることを示せ。

(ii) （ア），（イ），（ウ）を満たす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

（問題終り）

（以下余白） ［後期］