令和５年度（前期日程）
入学者選抜学力検査問題

数　　　学 （120 分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，下書きなどに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と下書用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 開区間 $(0, 1)$ で定義された 2 つの関数

$$f(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{\log t}{t}\, dt, \qquad g(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{\log t}{\sqrt{t}}\, dt$$

を考える。

(1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

(2) x の関数 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ は開区間 $(0, 1)$ で増加することを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の実数とする。関数 $f(x) = e^{ax}$ を考え，自然数 n に対し，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq n \\ 0 \leqq y \leqq f(x) \end{cases}$$

の表す xy 平面内の領域を D_n とする。D_n の点 (x, y) のうち，x と y がともに整数であるものの個数を $S(n)$ とし，また，D_n の面積を $T(n)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し，$T(n)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対し，$R(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{e^{an}}$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{T(n)}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{an}} = 0$ であることを証明なしに用いてよい。

（以下余白） ［前期］

3 i を虚数単位とする。α と β は異なる複素数とする。α とも β とも異なる複素数 z が条件

$$\frac{1}{2} \leqq \left|\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right| \leqq 3 \quad \text{かつ} \quad \frac{z-\beta}{z-\alpha} \text{ の偏角は } -\frac{\pi}{2} \text{ である}$$

を満たしながら動く。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 実数 $|z-\alpha|+|z-\beta|$ の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) 実数 $|z-\alpha|+|z-\beta|$ が (1) の値の範囲内の最小の実数に等しくなるような z の値をすべて求めよ。

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{2x} (\sin t) e^{-(t-x)^2}\, dt \qquad (0 < x < \pi)$$

により定める。このとき，x に関する方程式

$$f(x) + f''(x) = 0$$

の，$0 < x < \pi$ の範囲における実数解の個数を求めよ。ただし，$f''(x)$ は関数 $f(x)$ の第 2 次導関数である。

（問題終り）

（以下余白） ［前期］